DEVOIR DE SYNTHESE N°1

EXERCICE N°1 : 10' 3 points

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chacune des propositions données.

1°) Soit f, g et h trois fonctions définies sur IR et vérifiant pour tout x réel ,on a : $f(x) \le g(x) \le h(x)$

Si l'on sait de plus que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ .alors :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

2°) Soit f une fonction continue sur [0, 1], strictement croissante sur [0, 1] et dérivable sur]0, 1[.

Si l'on sait de plus que $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, alors :

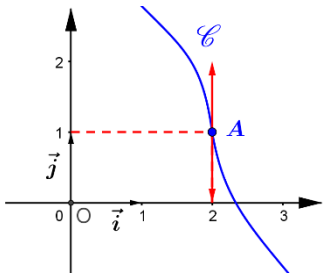
a) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans]0, 1[.

b) L'équation $f'(x) = -2$ admet au moins une solution dans]0, 1[.

3°) $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f passant par $A(2,1)$.

a) f est dérivable en 2.

b) A est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.



EXERCICE N°2 : 40' 7 points

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1°) Justifier la continuité de f sur IR.

2°) Monter que f dérivable sur IR et que $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

3°) a) Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter les résultats obtenus.

b) Dresser le tableau de variation de f sur IR.

4°) Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x) = f(x) - x$.*

a) Etudier le sens variation de h sur IR.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $]1;2[$ et que $\alpha \in \left]\dfrac{7}{4},2\right[$.*

c) Vérifier que : $\sqrt{\alpha^2+1} = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

5°) Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=\begin{cases} f(\tan x) & si\ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ 2 & si\ x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

a) Montrer que g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

b) Montrer que pour tout $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ on a : $g(x)=1+\sin x$.

EXERCICE N°3 : 30' 6 points

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0=1$ et pour tout n de IN $U_{n+1}=U_n+\frac{1}{4}(2-U_n^2)$.

1°) a) Montrer que pour tout n de IN, on a : $1\le U_n\le\sqrt{2}$.

b) Justifier que (U_n) est monotone.

c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2°) Soit f la fonction définie sur $[1,\sqrt{2}]$ par : $f(x)=x+\frac{1}{4}(2-x^2)$.

a) Montrer que pour tout x de $[1,\sqrt{2}]$, on a : $|f'(x)|\le\frac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout x de $[1,\sqrt{2}]$, on a : $|f(x)-\sqrt{2}|\le\frac{1}{2}|x-\sqrt{2}|$.

c) Montrer que pour tout n de IN , on a : $|U_{n+1}-\sqrt{2}|\le\frac{1}{2}|U_n-\sqrt{2}|$.

d) En déduire que pour tout n de IN, on a : $|U_n-\sqrt{2}|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

EXERCICE N°4 : 30' 4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Pour tout réel θ de $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_\theta): z^2-2(i+\cos\theta)z+2i\cos\theta=0$

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

2°) On désigne par A, M' et M'' les points d'affixes respectives : i ; $z'=i+e^{i\theta}$ et $z''=i+e^{-i\theta}$.

a) Montrer que lorsque θ décrit $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ les points M' et M'' varient sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera .

b) On note I le milieu du segment $[M'M'']$. Déterminer l'affixe de I.

c) Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ décrit $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.